

Joseph Boussinesq

(1842-1929)

Universitaire lillois et Académicien

par P.A. Bois

*Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR 8107
UFR de Mathématiques, Bât. M3, U.S.T.L., F-59655 Villeneuve d'Ascq
pbois@pop.univ-lille1.fr*

Joseph Boussinesq (1842-1929)

Universitaire lillois et Académicien

Sommaire

• Introduction	1.
• La Mécanique : une communauté à lisibilité ambiguë	2.
• Les années de formation : une origine modeste et une éducation plébéienne	3.
• L'état de l'art en Mécanique dans la deuxième moitié du XIX ^e siècle	4.
• La période lilloise : un élève de Saint-Venant ... mais aussi de Descartes et de Galilée	6.
(a) Le problème des contraintes statiques dans les sols	6.
(b) La turbulence, première phase	7.
(c) Les ondes de surface et l' « <i>équation de Boussinesq</i> »	8.
(d) L' « <i>équation BBO</i> »	9.
(e) La méthode du potentiel, le « <i>problème de Boussinesq</i> » et les vibrations des barres	10.
• Paris et l'Académie des Sciences	11.
(a) La turbulence, deuxième phase : l' « <i>hypothèse de Boussinesq</i> »	12.
(b) Une théorie analytique de la chaleur : l' « <i>Approximation de Boussinesq</i> »	13.
• Les dernières années d'un savant solitaire	16.
• L'héritage moderne de Boussinesq	17.
• Bibliographie	21.
(i) Œuvres citées de Joseph Boussinesq	21.
(ii) Documents biographiques et Histoire des Sciences	22.
(iii) Autour de Boussinesq et après Boussinesq	23.

Joseph Boussinesq (1842-1929)

Universitaire lillois et Académicien

par P.A. Bois

*Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR 8107
UFR de Mathématiques, Bât. M3, U.S.T.L., F-59655 Villeneuve d'Ascq
pbois@pop.univ-lille1.fr*

Introduction

L'Université des Sciences et Technologies de Lille (USTL) s'est toujours plu à honorer la mémoire des savants, et plus particulièrement de ceux qui ont fait partie de cette Université ou de sa forme ancienne la Faculté des Sciences de Lille. Cet hommage s'exprime notamment, depuis qu'elle occupe le campus de Villeneuve d'Ascq, dans les noms donnés par l'USTL à ses amphithéâtres et salles de cours, ou, plus exceptionnellement, à ses laboratoires. Le plus connu de ces savants est incontestablement Louis Pasteur. Mais d'autres, reconnus dans des cercles peut-être un peu plus restreints (Emile Borel, Paul Painlevé, Pierre Duhem pour rester dans les domaines que je connais) n'ont rien à envier à Pasteur en matière de notoriété scientifique.

Pour qui connaît un peu l'histoire des Sciences mécaniques, c'est certainement une surprise de constater que nulle part dans cette reconnaissance ne figure (2004) le nom de Joseph Boussinesq : voilà un savant de renommée internationale ⁽¹⁾, auteur de nombreuses « *équations de Boussinesq* », « *hypothèses de Boussinesq* », « *formules de Boussinesq* » etc., que l'on trouve dans tous les traités de Mécanique, qui a passé à l'Université de Lille quatorze années de sa vie, qui n'a quitté Lille que parce qu'élu à l'Académie des Sciences, il avait à Paris, suivant la règle de son époque, l'obligation de résidence, et qui semble avoir été oublié dans cette mémoire de l'USTL.

Pourtant, le nom de Boussinesq n'est pas éteint partout : trop spécialisé pour faire parler de lui dans le petit Larousse, on trouve une notice à son nom sous la signature de H. Berger et C. Ballot (1970) dans le *Dictionary of Scientific Biography*. La ville de Saint-André de Sangonis (où il est né) lui a rendu hommage le 20 avril 1996 au cours d'une « Journée commémorative ». La ville de Montpellier a donné son nom à l'une de ses rues. On peut signaler également, à l'USTL même, un portrait de Boussinesq vu par un mathématicien (M. Parreau, 2004). Enfin trois publications mécaniciennes ont commémoré récemment son personnage scientifique : l'une (W.H. Hager et F. Ræmy, 1997) concerne ses travaux sur la *turbulence* ; les deux autres (R. Zeytounian, 2003a, b) parlent de l'« *Approximation* ». Au-delà de ces deux facettes de

⁽¹⁾ Le lecteur intéressé peut appeler, sur le moteur de recherche internet Google, l'entrée « Boussinesq » et chercher le nombre de citations de ce savant (décembre 2004) : 85000 environ. A titre de comparaison, l'entrée « Painlevé » en comporte 61000.

l'incroyable palette de ce savant polyvalent, il semble qu'un portrait plus large pourrait essayer de rendre aujourd'hui à Boussinesq ce que lui doit la communauté universitaire ... et remettre à sa place l'un des savants les plus inexplicablement méconnus que l'Université de Lille ait abrité dans ses murs.

La Mécanique : une communauté à lisibilité ambiguë

Comme je l'ai dit plus haut, Boussinesq est d'abord un *Mécanicien*. Qu'est-ce qu'un Mécanicien ? on dit souvent de la Mécanique qu'il s'agit de « la plus physique des Sciences mathématiques » en même temps que de « la plus mathématique des Sciences physiques ». Cette double définition met l'accent sur l'un des problèmes d'identification de cette Science. Revendiquée simultanément par les deux communautés mathématicienne et physicienne, celles-ci, tout en s'y reconnaissant, n'y voient pas la même chose et n'y recherchent pas non plus la même chose.

Les Mathématiciens voient dans la Mécanique un champ d'application concrète de théories qu'ils élaborent, bien souvent, en recherchant l'abstraction, quand ce n'est pas dans les phénomènes de Mécanique qu'ils puisent des concepts qu'ils pourront pousser à la même abstraction (c'est ainsi que l'on doit à la Mécanique, au XVIII^e siècle, l'invention des équations différentielles). Un exemple de ce regard « mathématique » sur la Mécanique est justement le portrait de J. Boussinesq fait à Lille par M. Parreau, qui constate que Boussinesq « *n'est plus guère connu aujourd'hui* ». Il est probable en effet que, chez les mathématiciens, Boussinesq n'est guère connu : est-ce bien surprenant ?

D'un autre côté, si le Physicien admet généralement que la Mécanique est bien la mère des Sciences physiques, il n'y voit aujourd'hui que l'une des disciplines qu'il étudie lui-même lorsqu'il cherche à identifier les propriétés de la matière afin d'en rendre possible l'exploitation : l'Electricité, l'Optique, en sont d'autres, qu'il étudie avec la même persévérance et (au moins) la même ardeur. Tout au plus reconnaît-il à la Mécanique que le faible nombre d'hypothèses nécessaires à sa modélisation en permet, contrairement à d'autres Sciences physiques, une modélisation mathématique qui peut aller très loin.

Quoi qu'il en soit, on peut dire que depuis Archimède jusque au XIX^e siècle, la Mécanique s'est constamment rapportée à l'une de ces deux Sciences ⁽²⁾.

La création des Ecoles d'Ingénieurs que l'on peut dater (*grosso modo*) du début du XIX^e siècle, crée en même temps une troisième communauté : celle des Sciences de l'Ingénieur. A l'origine les Ingénieurs sont des militaires qui construisent des fortifications : quelle qu'ait pu être l'inflexion qu'ait prise ensuite leur orientation (ponts, moteurs, machines, génie civil etc ...), on conçoit que la première Science à laquelle ils se soient adossés ait été la Mécanique. En définitive la Mécanique, à partir du XIX^e siècle, reposera toujours sur ces trois pieds que sont les *Mathématiques*, la *Physique* et les *Sciences de l'Ingénieur* ⁽³⁾. Si (Mécanique oblige) cela lui

⁽²⁾ Il va de soi que les termes « *Mécanique* » et « *Physique* » sont compris ici comme décrivant les sciences modernes portant ces noms (et non pas, comme au temps d'Archimède, une spécialité des Mathématiques [pour la Mécanique] et l'ensemble des sciences non mathématiques [pour la Physique]).

⁽³⁾ L'existence elle-même des *Sciences de l'Ingénieur* soulève un autre débat, une partie de la communauté scientifique considérant que des sciences de l'Ingénieur doivent exister au sein de chaque discipline, sans distinguer pour cela une communauté particulière. Quoi qu'il en soit, il faut convenir que ces Sciences, quel que soit leur objet, admettent simultanément une *approche scientifique rigoureuse* de connotation mathématique, associée à une perspective obligatoirement orientée vers les *applications concrètes*, celles-ci tournées vers la technologie.

garantit une certaine stabilité, on ne peut pas dire en revanche que cela favorise sa lisibilité et sa perception. Allons même un peu plus loin : le rattachement de la Mécanique aux Sciences de l'Ingénieur pousserait peut-être la communauté scientifique à ne plus reconnaître dans cette Science une partie plus fondamentale.

Lorsque Joseph Boussinesq (*voir* ci-après) fait son entrée dans le monde scientifique, la Mécanique est en train de forger le système d'équations qui la gouverne. C'est donc à cela que se livrera Boussinesq. Il s'y livrera toute sa vie, et, comme on le verra, il s'y livrera très bien. Lillois de hasard (comme nombre de Professeurs d'Université, son origine ne compte pas beaucoup dans sa carrière), il fera pendant sa période lilloise plusieurs découvertes qui le mèneront à l'Académie des Sciences et dont nous parlerons ci-après.

Les années de formation : une origine modeste et une éducation plébéienne

Né le 13 mars 1842 à St André de Sangonis, petite ville de l'Hérault entre Montpellier et Lodève, Joseph Valentin Boussinesq est fils d'un père agriculteur et d'une mère elle-même d'un industriel. En cette période où se fixe en France la « société industrielle », on est à l'époque de la grande migration rurale vers les villes : signe des temps, ses parents font faire à Joseph des études : d'abord primaires, à une époque où l'école n'est pas obligatoire, puis secondaires, sous la férule d'un oncle prêtre. Celui-ci, reconnaissant les talents de son neveu, lui enseigne le latin et le grec. Joseph Boussinesq fait enfin des études supérieures tout en étant maître d'internat au lycée de Montpellier : il obtient une licence de mathématiques à l'âge de 19 ans à la Faculté des Sciences de cette même ville. On peut noter la modestie de ce parcours : en fait, sa mère étant décédée en 1857, c'est contre le souhait de son père (qui aurait voulu lui voir reprendre l'exploitation familiale) que Boussinesq est allé étudier à Montpellier.

Armé de sa licence de mathématiques, Boussinesq entre dans l'enseignement, et il est nommé à divers postes dans des petites villes du midi : Agde (1862), Le Vigan (1865), Gap (1866). C'est à Agde que la lecture des livres de Gabriel Lamé (1785-1870) ⁽⁴⁾ lui inspire un premier travail sur l'impact d'un jet d'eau sur une plaque élastique, et dont il obtient la publication dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*. Atteint désormais par le virus de la recherche, il entreprend alors une thèse. Celle-ci est soutenue à Paris le 13 mai 1867, sur la « *propagation de la chaleur dans les milieux homogènes* » ⁽⁵⁾ (*réf.* [1]) : il est probable que, là encore, c'est l'influence de Lamé qui a réglé le choix du sujet ⁽⁶⁾. Concomitamment avec cette

⁽⁴⁾ Lamé était, selon le mot d'Albert de Lapparent (1897) un « géomètre qui enseignait la Physique ». Il se trouve, dans les années 1850, au sommet de son art. Entre 1852 et 1861 il publiera au moins cinq livres dont deux au moins ne peuvent pas avoir échappé à l'attention de Boussinesq : « *Théorie mathématique de l'élasticité* » (1852), « *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* » (1861), ce dernier cité par Boussinesq dans sa thèse.

⁽⁵⁾ ... et non pas « hétérogènes » (!) comme le disent certaines de ses biographies. Ils sont, en revanche, anisotropes : il s'agit de milieux cristallins.

⁽⁶⁾ Lamé avait été le présentateur de la première publication de Boussinesq à l'Académie des Sciences. Bien qu'il ne figure pas au jury de la thèse (en 1867, il est en retraite, et le jury est composé de J. Serret, J. Bertrand et C.A. Briot), on reconnaît son influence dans la manière qu'a Boussinesq de traiter son sujet : le mémoire est presque entièrement consacré à des aspects géométriques de la question. Saint-Venant, qui a peut-être supervisé la thèse durant son élaboration, ne figure pas non plus au jury (est-ce parce qu'il n'est pas Professeur d'Université ?)

Boussinesq s'explique longuement (dans *réf.* [22], pp. 267-268) sur ce sujet de thèse qui n'était pas son « premier choix » : en fait, suite à ses premiers travaux, Boussinesq avait d'abord rédigé un travail sur un sujet d'optique (une « théorie mécanique de la lumière ») qui, le directeur de thèse (Emile Verdet, 1824-1866) étant inopinément décédé, ne put être soutenu : héritant d'un nouveau directeur qu'il n'avait pas choisi, il présenta alors

thèse, il réalise quelques travaux d'élasticité linéaire qui sont remarquables, à l'Académie des Sciences, par Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886) : celui-ci, admiratif, entre en correspondance avec Boussinesq et lui souffle qu'un avenir universitaire pourrait bien lui être promis. Désormais, il ne cessera plus de lui accorder un soutien sans faille. Pour commencer, l'Académie des Sciences décerne à Boussinesq (1872) le nouveau ⁽⁷⁾ prix Poncelet. Sur le conseil de Saint-Venant, Boussinesq passe également (1872) une licence de Physique ⁽⁸⁾. Finalement il est nommé en 1873 *Professeur de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Lille* ⁽⁹⁾.

L'état de l'art en Mécanique dans la deuxième moitié du XIX^e siècle

Pour suivre la démarche scientifique de Boussinesq, essayons de situer brièvement l'état de la Science mécanique dans les années 1860 : la Mécanique des solides rigides est à peu près mise en place depuis la fin du XVIII^e siècle (disons, pour fixer une date : Lagrange, 1788). La Mécanique des fluides incompressibles non visqueux est, elle aussi, à peu près connue depuis les travaux de Daniel Bernoulli (1727), d'Alembert (1755), Euler (1759), Laplace (1784). Bien sûr quelques mystères demeurent inexplicables, comme, par exemple, le *paradoxe de d'Alembert*. Mais ces mystères restent, somme toute, peu nombreux.

En 1822 Claude-Louis Navier (1785-1836) a tenté la première modélisation dynamique des milieux continus déformables, tant solides élastiques que fluides visqueux, utilisant pour cela une description tensorielle des efforts de cohésion. Malheureusement son modèle est à la fois trop rudimentaire et erroné, de sorte qu'il ne réussit qu'à s'attirer les foudres de son ancien maître Siméon Denis Poisson (1781-1840). C'est après la mort de Navier (1836) que son ancien élève Saint-Venant (déjà lui !) démontre effectivement (1843) ce qu'avait trouvé Navier. Saint-Venant, en donnant cette démonstration, vient de donner le départ de ce qui sera, pour plus d'un siècle, l'approche de la *Mécanique des Milieux continus*. En 1845, George Gabriel Stokes (1819-1903) retrouve les équations de Navier par une approche un peu différente : indépendamment de Navier (c'est ce qu'affirment les Anglais avec une certaine candeur), il redémontre en utilisant pour les forces de cohésion une modélisation tensorielle analogue à celle qu'avait utilisée Saint-

un travail « de raccroc », certainement réalisé rapidement, et qui convenait mieux (c'est ce que dit Boussinesq trente-six ans plus tard) à la personnalité de son nouveau directeur. Ce travail fut accepté et constitua, en définitive, sa thèse. Le travail initialement prévu pour être sa thèse fut publié dans *réf.* [2] (1868) puis, beaucoup plus tard, en version développée dans *réf.* [22].

⁽⁷⁾ J.V. Poncelet est décédé en 1867. Ce prix triennal est décerné depuis 1868, mais n'a pas été décerné en 1871.

⁽⁸⁾ A cette époque, le seul diplôme d'Etat était la *Licence ès sciences*, que Boussinesq possédait déjà. Mais des options distinguaient déjà une spécialité « mathématiques » (celle qu'avait Boussinesq) et une spécialité « physique » qu'on lui demanda de passer pour pouvoir être nommé Professeur de Mécanique (preuve du statut ambigu de la Mécanique). Pour préparer sa licence de Physique, Boussinesq est contraint de se mettre en congé pour un an. La même contrainte que celle qui lui est imposée en 1872 sera imposée en 1890 à Maurice Couette, lui aussi licencié de mathématiques : en 1890, la *Licence de Mathématiques* et la *Licence de Physique* existent distinctement, et ce sont ces deux diplômes que devra posséder Couette pour être nommé Professeur à l'Université catholique d'Angers dans des conditions analogues à Boussinesq en 1872 à Lille.

⁽⁹⁾ En 1873 on se trouve deux ans après la défaite de 1871. Une commission nommée par l'Assemblée nationale pour élucider les causes de la défaite a déjà constaté le « *niveau de culture déplorable du corps des officiers* » (nombre d'entre eux, par exemple, ne savent pas lire une carte d'état-major, voir par exemple P. Rivé, 1987). L'un des premiers soucis de la III^e République naissante est donc d'élever le niveau d'instruction générale de la nation. Cela passe par le développement, quand ce n'est pas purement et simplement la création, des Universités de province. Celles-ci offrent ainsi aux jeunes savants de nombreux postes et débouchés.

Venant, les équations de Navier ⁽¹⁰⁾ : celles-ci recevront en définitive le nom d'*équations de Navier-Stokes*.

En Mécanique des solides déformables, les travaux de Poisson, Lamé, Navier, Young (1773-1829), Saint-Venant, font autorité : disons pour simplifier que ceux-ci ont à peu près éclairci l'élasticité linéaire et identifié les comportements plastiques. Parallèlement des travaux d'ingénieurs développent l'étude des milieux à description géométrique simplifiée (poutres, plaques, ...). A l'heure où Boussinesq s'intéresse aux problèmes en cours, le lien n'est cependant pas très clair entre ces deux approches des milieux simplifiés et des milieux tridimensionnels réels. Des recherches portent également sur des milieux de structure physiquement plus complexe, par exemple la thermoélasticité (ce qui explique la thèse du jeune Boussinesq), mais aussi sur les milieux poreux, les milieux pulvérulents ou les milieux plastiques : là l'approche est plus timide.

Dans un autre champ d'investigation, la notion de chaleur s'est installée progressivement dans l'univers des Physiciens. L'invention de la machine à vapeur (1769, par Watt) en a été le détonateur puis le catalyseur : il devient en effet indispensable de maîtriser cette notion pour pouvoir développer la nouvelle machine. Sans détailler comment s'imposent petit à petit les deux principes de la thermodynamique, disons qu'en 1860 leur énoncé est à peu près acquis, mais leur nouveauté les rend encore fragiles. En 1847, Hermann Helmholtz (1821-1894) a clos la question du premier principe en formulant pour la première fois le « principe de la conservation de l'énergie ». Pour le second principe, au contraire, le monde scientifique en subodore la puissance, mais reste loin de le contrôler : il découvre, un peu éberlué, avec ce principe, que la thermodynamique concerne non pas la seule machine à vapeur, mais l'ensemble des Sciences physiques.

Parallèlement à ces théoriciens, une cohorte de physiciens expérimentaux établit, tout le long du XIX^e siècle, de nouvelles propriétés des milieux matériels déformables (fluides et solides) que n'avaient pas su expliquer les savants du XVIII^e siècle, ou qu'ils avaient mis, bien souvent un peu rapidement, sur le compte d'« erreurs de mesure » non justifiées (effets de bord et autres). Le médecin Jean-Léonard Poiseuille (1797-1869) et, presque en même temps le physicien allemand Gotthilf Hagen (1797-1884) découvrent la « loi de Poiseuille » (1846). Sans attendre les expériences d'Osborne Reynolds qui viendront beaucoup plus tard, Hagen a identifié dès 1839 l'existence de deux sortes d'écoulements visqueux. Il n'est d'ailleurs pas seul : Henry Darcy (1857) et son élève Henri-Emile Bazin (1865) ⁽¹¹⁾, qui se livrent à des expériences visant à confirmer (ou infirmer) les équations de Navier-Stokes, discernent eux aussi très rapidement la différence entre les écoulements *laminaires* et les écoulements *turbulents*. De son côté Adolf Fick (1829-1901), physiologiste et acousticien autrichien, découvre la loi de diffusion de composants dans un fluide hétérogène : la « loi de Fick ». Toutes ces lois, établies expérimentalement et, bien souvent, dans un grand désordre, ne font, parfois, que retrouver

⁽¹⁰⁾ En fait Stokes voulait, au départ, (voir J.D. Anderson, 1997) justifier une formule établie par Newton $\tau = \mu dv/dn$ fournissant l'effort de cisaillement exercé par un fluide visqueux qui s'écoulait autour d'un solide, formule que les équations de Navier-Stokes justifient effectivement. On peut s'arrêter un instant sur ces « équations de Navier-Stokes » qui ignorent le nom de la seule personne qu'elles n'auraient pas dû oublier : Saint-Venant.

⁽¹¹⁾ Les travaux expérimentaux de Henry Darcy (1803-1858, célèbre par la loi de Darcy sur les milieux poreux) sur l'écoulement des fluides dans les tubes le font apparaître comme un *précurseur* (mais ceux-ci sont nombreux) à la fois de la notion de *couche-limite* et de celle de *turbulence*. Malheureusement ses travaux furent arrêtés par une mort prématurée en 1858. Ils furent publiés en 1865 par son ancien assistant Jules Dupuit (1804-1866) et son ancien élève Henri-Emile Bazin (1829-1917).

sous une nouvelle forme ce qu'une autre loi avait démontré pour un autre phénomène ⁽¹²⁾.

Quels sont alors les problèmes de modélisation qui se posent à la communauté scientifique ? Disposant aujourd'hui d'un recul de cent-quarante ans, nous pouvons à peu près les identifier. Dans le cadre de la Physique macroscopique qui caractérise la Mécanique des milieux continus, ces problèmes sont de trois ordres : *rhéologiques* (la thermodynamique n'a pas fini de livrer ses secrets, mais cela durera jusqu'au milieu du XX^e siècle) ; *statistiques* (le problème de la distinction entre les descriptions déterministes et non déterministes n'est pas encore posé, mais le sera dès 1883) ; *asymptotiques* : compte tenu des progrès de l'analyse au XIX^e siècle, c'est probablement dans ce domaine que le milieu savant est le mieux armé. Mais l'absence d'identification de ces trois catégories de problèmes fait que les chercheurs les confondent et les mélangent un peu. Malgré tout, dans ces trois directions, des avancées notables seront réalisées dans la deuxième moitié du siècle ⁽¹³⁾.

La période lilloise : un élève de Saint-Venant ... mais aussi de Descartes et de Galilée

Il serait bien difficile de suivre dans le détail le parcours scientifique de Joseph Boussinesq : son œuvre, comme le souligne Emile Picard (1933) dans un discours obituaire, concerne un champ de la Physique tellement vaste que l'on reste encore aujourd'hui effaré d'une telle polyvalence. Pour citer Picard, « *Boussinesq a consacré d'importants travaux à toutes les parties de la Physique mathématique, à l'exception de l'électromagnétisme* ». Les titres de ses publications suffisent à illustrer ces différents côtés de son personnage, y compris des travaux à connotation philosophique (*réfs.* [11], [13]) ou philosophico-historique, (*réf.* [30]).

Lorsque, dans tous les travaux de Boussinesq, on recherche une démarche directrice, on constate d'abord que, cités avec plus ou moins de précision, figurent toujours, au départ, soit des résultats expérimentaux, soit des travaux théoriques plus anciens, d'auteurs qui, dans les deux cas, sont ses contemporains. Ces travaux sont analysés avec la plus grande minutie : c'est le cas, par exemple, des travaux de Rankine (1856) ou des résultats de Bazin (1865). En cela Boussinesq fait montre d'une rigueur extrême. Ainsi, il est bien un élève de Descartes, et, sans être pour autant un expérimentateur, il reste un disciple de Galilée. En revanche ce n'est pas lui qui initialisera un domaine à défricher : il sera toujours un *modélisateur*. De plus, sa pensée tournant toujours sur les modèles, il mêle assez souvent des sujets d'étude apparemment distincts ou fort éloignés, ce qui ne rend pas toujours très aisée la lecture de ses publications.

(a) ***Le problème des contraintes statiques dans les sols.*** Lorsque Boussinesq arrive à Lille, il est sous le charme de Saint-Venant. Celui-ci, professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, lui a fait connaître un autre de ses élèves : Alfred Flamant (1839-1914), ingénieur des Ponts et Chaussées, avec qui Boussinesq échangera quelques idées ⁽¹⁴⁾. Pour l'heure, et certainement

⁽¹²⁾ On reste saisi, lorsqu'on imagine les conditions dans lesquelles étaient réalisées les expériences du XIX^e siècle, par la finesse et la précision des résultats qu'avaient obtenus généralement leurs auteurs.

⁽¹³⁾ Notons que nous n'avons rien dit ici sur des pans entiers de la Mécanique, comme par exemple, la Mécanique des fluides compressibles, Mécanique qui se développera grâce à la thermodynamique et qui ira jusqu'à la Mécanique du vol. La raison en est simplement que ces domaines n'appartiennent pas au champ d'étude de Boussinesq et qu'il n'est pas possible de faire ici une description exhaustive de la Science mécanique.

⁽¹⁴⁾ ... et même plus que des idées : on trouve aussi bien en Mécanique des sols (Flamant, 1885) qu'en Mécanique des fluides (Flamant, 1888) [références non exhaustives] des travaux de Flamant portant la

encouragé par Saint-Venant, il se lance dans des problèmes de Mécanique des sols. Il s'agit d'évaluer les efforts dans un milieu pulvérulent (dont la description cinématique et dynamique tient partiellement du milieu fluide et du milieu solide) en vue d'applications au génie civil. Saint-Venant voudrait voir améliorer des résultats qu'avait obtenus en 1856 l'Écossais John Rankine (1820-1872), et qu'il trouve un peu restrictifs. Boussinesq part, pour modéliser le milieu, d'une description élastique dans laquelle il introduit une (petite) correction « pulvérulente ». Cette correction consiste essentiellement à introduire dans la loi de comportement des coefficients de Lamé dépendant de la pression dans le sol. Symboles de sa démarche scientifique, ses modèles seront très souvent des « petites corrections » d'autres modèles. Cette approche diffère de celle qu'avait suivie, avant lui, Rankine. Celui-ci n'avait obtenu des équations valables que lorsque le milieu était à la limite de la rupture (par exemple un tas de sable dont la pression nulle sur la face externe entraîne l'éboulement). Par ailleurs, ne sachant comment résoudre les équations qu'il avait obtenues, il faisait, assez gratuitement, une hypothèse simplificatrice dont l'objet n'était que de permettre d'obtenir des solutions par une démarche analytique ⁽¹⁵⁾ : Boussinesq s'empresse de réduire cette hypothèse avant de proposer sa « correction ». Il obtient par ce procédé des solutions au problème du tas de sable en position arbitraire par rapport au cas-limite qu'avait envisagé Rankine. Mieux, il a la surprise de voir apparaître un deuxième cas de rupture, par excès de pression, correspondant à un écrasement du massif. On voit immédiatement les applications de ce problème au génie civil : les résultats font l'objet de plusieurs publications (réf. [8] par exemple). Le nom de Boussinesq commence à être largement connu.

(b) **La turbulence, première phase.** Il s'agit là d'un des premiers problèmes d'hydrodynamique qui ont frappé Boussinesq. Celui-ci s'intéresse aux fluides depuis qu'il est à Gap (peut-être en se promenant le long des torrents de montagne, dont le régime, turbulent, est justement celui que l'on désigne aujourd'hui par ... torrentiel ?). Afin de mieux comprendre les questions posées, rappelons qu'en 1868 l'énoncé des équations de Navier-Stokes, qui date de 1845, n'est vieux que d'une vingtaine d'années. En l'absence d'expérimentation suffisamment décisive, ces équations sont encore controversées : jusqu'aux expériences de Couette (1890), leur seule validation est l'expérience de Poiseuille, qui, elle-même, ne valide Navier-Stokes que pour des écoulements assez lents. Averti des résultats expérimentaux obtenus par Darcy (1857) puis Bazin (1865) qui confirment les régimes « tumultueux » décrits par Hagen, Boussinesq (réf. [3]) a déjà tenté (1868) une description de la loi contrainte-déformation dépendant de l'agitation tourbillonnaire dans le milieu : en fait, il pense que la description de Navier-Stokes est peut-être incomplète, ou bien qu'il manque dans ses formules des termes qui n'apparaîtraient que dans les écoulements suffisamment rapides. Il réitère en 1878 (réf. [10]), mais sa contribution, qui ignore encore les travaux de Reynolds (ceux-ci ne seront connus qu'à partir de 1883), a surtout le mérite, comme le soulignent Hager et Ræmy (1997) « d'avoir reconnu le problème de base ». Ainsi la contribution de 1897 (voir plus loin) en formulant pour la première fois « l'hypothèse de Boussinesq » sur la fermeture des équations turbulentes, sera-t-elle à la fois beaucoup plus solide et beaucoup plus fructueuse. Dans l'immédiat, on peut dire que l'erreur est de rechercher une loi *phénoménologique* à un problème dont l'énoncé devrait être *statistique*. On sait bien aujourd'hui pourquoi le problème comme le pose alors Boussinesq est sans espoir : d'une part

marque de leur collaboration.

⁽¹⁵⁾ L'hypothèse de Rankine consistait à postuler que les solutions d'une équation $F(g(x, y)) = 0$ étaient de la forme $g(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$.

toute loi phénoménologique doit s'appuyer sur une rhéologie, c'est-à dire sur la thermodynamique ; d'autre part tout phénomène statistique doit s'appuyer sur une description non déterministe qui doit elle-même respecter une certaine cohérence. Deux erreurs dues, comme on l'a vu plus haut, à une analyse insuffisante des problèmes à étudier.

(c) *Les ondes de surface et l' « équation de Boussinesq »*. Avec ce problème, Boussinesq marche sur un terrain beaucoup plus sûr : au départ, il s'agit des ondes de surface dans les canaux observées en 1834 par l'Anglais J.S. Russell (1808-1882). Celui-ci a consigné soigneusement ses observations, et, en particulier, a décrit cette onde de longueur d'onde infinie que l'on commence à appeler « onde solitaire ». Stokes, et, dans son sillage Airy (1801-1892) puis Kelvin (1824-1907) ont déjà tenté d'apporter une solution théorique à ce problème. Mais ces solutions sont insatisfaisantes : aucun d'eux n'a tenu compte correctement de l'effet d'eau « peu profonde » qui, on le sait aujourd'hui, caractérise ces problèmes.

Doit-on encore invoquer, dans le choix de ce sujet de recherche, l'influence de Saint-Venant ? ce n'est pas impossible : Saint-Venant a obtenu en 1871 des équations simplifiées (appelées aujourd'hui « équations de Saint-Venant ») pour décrire les milieux fluides en faible profondeur. Mais ces équations ne décrivent pas le phénomène observé par Russell. Un des premiers problèmes auxquels s'attaque Boussinesq après sa thèse est l'explication de ce phénomène. Combinant à la fois l'influence de la faible amplitude des ondes observées et celle de la faible hauteur du canal par rapport à son extension horizontale, il obtient une équation (appelée aujourd'hui « équation de Boussinesq ») que l'on peut écrire

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} = \alpha u_{xxxx} + \beta(u^2)_{xx},$$

où u désigne la dénivellation verticale de la surface libre et x l'abscisse horizontale le long du canal. Dans ce travail, dont la publication s'étale de 1871 à 1877, Boussinesq est allé beaucoup plus loin que Saint-Venant : les seules équations de Saint-Venant ne permettraient pas, en effet, d'obtenir l'équation (1) (le terme de coefficient α n'y figurerait pas). Mais Boussinesq ne se contente pas d'établir l'équation : il en donne des solutions, et en particulier l'une d'elles qui correspond effectivement à l'onde solitaire (réfs. [4], [6], [7], [9]). L'équation de Boussinesq et sa solution sont retrouvées peu après (1876) par Rayleigh (1842-1919). Presque vingt ans plus tard (1895) le Hollandais J.D. Korteweg (1848-1941) et son élève G. De Vries découvriront l' « équation de Korteweg-De Vries » et sa solution : cette équation correspond approximativement à une onde simple associée elle-même à l'équation de Boussinesq. Korteweg et De Vries l'ont obtenue par une approche directe et sans remarquer la parenté entre les deux problèmes ⁽¹⁶⁾. Boussinesq montre aussi que cette même équation (1) est également celle des vibrations longitudinales des barres élastiques pour des mouvements légèrement non linéaires. Les deux paramètres en interférence sont alors l'amplitude des vibrations et l'épaisseur de la barre comparée à sa longueur.

En s'attaquant au problème des ondes de surface en eau peu profonde, Boussinesq vient

⁽¹⁶⁾ En fait la parenté entre les deux équations de Korteweg-De Vries et de Boussinesq n'apparaît que si l'on recherche des solutions approchées de l'équation de Boussinesq. Elle ne semble pas avoir été perçue très rapidement : le premier ouvrage dans lequel j'ai trouvé mention du statut d'onde simple de l'équation de Korteweg-De Vries vis-à-vis de l'équation de Boussinesq (elle en décrit l'un des invariants de Riemann) est le livre de G.B. Whitham « *Linear and nonlinear waves* » (1974), presque de cent ans postérieur à ces deux publications. On trouve ensuite cette observation chez d'autres auteurs (J.W. Miles, 1980, par exemple).

Curieusement il semble que cette question de parenté n'ait interpellé ni Boussinesq, ni Korteweg. Mais on doit remarquer que la théorie des caractéristiques, qui permet de l'expliquer, n'apparaît en Mécanique des fluides qu'en 1887 avec des travaux d'Hugoniot, et que celui-ci, malheureusement décédé brutalement cette même année, n'aura pas le temps de l'illustrer.

de préciser la méthode scientifique qui, de plus en plus, va guider l'essentiel de ses découvertes : par une intuition qui s'appuie sur la lecture de données expérimentales (parfois sommaires, voir plus haut), il a extrait des équations des phénomènes qu'il étudie les paramètres gouvernant le comportement des solutions que donne l'expérience et il met en évidence des cas singuliers où plusieurs de ces paramètres entrent en compétition. La plupart du temps ces paramètres ne sont pas identifiés sur un plan formel (ou, disons, asymptotique) : c'est la comparaison entre diverses valeurs numériques obtenues par l'expérimentateur qui guide son choix. Dans l'équation (1) par exemple, le premier membre représente un opérateur des ondes gouvernant la propagation du phénomène. Le premier terme du second membre représente l'effet d'altération dû (ici) à la profondeur « *pas tout-à fait faible* » (coefficient α). C'est la *prépondérance* de ce terme devant l'opérateur des ondes dans la modélisation de Stokes qui interdit *a priori* à celui-ci d'obtenir le comportement d'onde solitaire. C'est, au contraire, son *absence*, qui interdit à Saint-Venant la même chose : ainsi, Boussinesq se trouve bien à mi-distance entre les deux modèles. Malgré tout, cette position moyenne est encore insuffisante : la présence du second terme perturbateur (coefficient β) est indispensable, signifiant que les ondes solitaires ne peuvent se produire que dans des ondes d'amplitude pas tout-à fait infinitésimale. Conserver en même temps tous les termes de l'équation (1) signifie que les trois effets décrits se trouvent en compétition.

Ignorant les travaux de William Froude (1810-1879) sur la similitude qui sont alors tout juste en cours de publication, Boussinesq n'a pas justifié formellement son équation. Pour que son analyse soit complète au sens actuel, il y manque encore la notion de « temps lent » qui devrait y figurer. En ce sens, on peut dire qu'il est un des précurseurs de l'*analyse dimensionnelle* et de la *modélisation asymptotique*.

(d) **L'équation BBO.** Boussinesq est maintenant bien installé dans les fluides. Toujours intrigué par les comportements visqueux, il s'attaque à un problème déjà considéré par Stokes, mais que celui-ci n'avait résolu que dans le cas stationnaire ⁽¹⁷⁾ : le mouvement d'un corps solide au sein d'un fluide visqueux au repos. Il s'agit d'estimer les efforts autour du corps dus à la non-uniformité du mouvement. Boussinesq publie à ce propos une modeste note à l'Académie des Sciences (1885, *réf.* [15]), dans laquelle il propose une formule basée sur l'approximation de Stokes, mais à laquelle, selon son habitude, il a ajouté un terme correctif. Cette formule sera retrouvée trois ans plus tard par Basset (1888), et la force observée par Boussinesq et Basset sera appelée par les Britanniques « *force de Basset* ». Beaucoup plus tard (1910) le Suédois Carl Oseen (1879-1944) donnera un troisième énoncé de l'équation, cohérent avec l'« *approximation d'Oseen* », que lui-même avait formée afin de résoudre le paradoxe de Stokes. Cette équation, qui gouverne le mouvement des particules flottant dans l'air, est finalement connue sous le nom d'« *équation BBO* ». Elle réapparaîtra régulièrement dans les préoccupations des hydrauliciens (Faxen, 1923, Corrsin & Lumley, 1959, ...) et elle donne, aujourd'hui encore, matière à de nombreux travaux scientifiques (*voir* par exemple Coimbra & Rangel, 1998, et les références de cet article).

Boussinesq n'en a pas fini avec cette équation : il en publiera une étude détaillée en 1903 dans son livre « *Théorie analytique de la chaleur* » (*réf.* [22]) puis il l'étendra un peu plus tard (*réfs.* [27], [28], [33]) à l'étude de la chute des gouttes d'eau dans l'air, en introduisant dans son modèle une relation tenant compte de l'influence des forces de capillarité.

⁽¹⁷⁾ Il s'agit de l'écoulement de Stokes autour de la sphère, dont G.G. Stokes a donné (1851) la solution. Dans le même travail, Stokes a mis au jour le « *paradoxe de Stokes* », qui ne sera résolu que par C.W. Oseen (1910), puis décrypté mathématiquement par I. Proudman et J.R.A. Pearson (1957).

(e) *La méthode du potentiel, le « problème de Boussinesq » et les vibrations des barres.* Cette « méthode du potentiel », au demeurant assez simple vue d'aujourd'hui, représente d'une certaine manière, un point d'orgue pour les travaux lillois de Boussinesq. Celui-ci reprend (probablement entre 1880 et 1885) tous les problèmes qu'il a publiés jusqu'alors. Recherchant dans les équations qu'il a établies antérieurement des potentiels ϕ (ce qui n'est pas tellement difficile à trouver : par exemple la fonction de contraintes d'un solide en état de torsion statique en est un), Boussinesq propose tout d'abord une méthode de calcul de la solution d'un problème gouverné par l'équation $\Delta\phi = 0$, dans le cas où ϕ est à symétrie sphérique et à valeur imposée dans un petit domaine entourant la singularité : on dirait aujourd'hui qu'il détermine la solution engendrée par une masse de Dirac placée en un point. Ensuite, intégrant cette solution lorsque la source parcourt un domaine tridimensionnel avec une intensité variable, il établit une formule générale : toujours en vocabulaire moderne, il vient de réaliser une convolution.

Après sa solution de l'équation de Laplace, Boussinesq s'aperçoit que celle-ci n'est peut-être pas la seule à laquelle s'applique sa méthode. Il considère alors l'équation biharmonique :

$$(2) \quad \Delta\Delta\phi = 0,$$

dont la solution s'obtient en résolvant d'abord l'équation $\Delta\psi = 0$, puis l'équation $\Delta\phi = \psi$. la méthode peut donc assez aisément être généralisée, et Boussinesq le fait effectivement : en fait, il généralise même jusque à l'équation $(\Delta)^n\phi = 0$. Ces équations se rencontrent dans de nombreux problèmes d'élasticité : par exemple l'équation de Laplace est celle des problèmes de torsion des barres, l'équation (2) est celle que satisfont les composantes des déplacements. Le plus célèbre des problèmes qu'il résout ainsi reste toutefois le problème « du poinçon » (champ des contraintes dans un massif solide occupant un demi-espace bordé par une surface plane, lorsque une masse de Dirac est appliquée en un point de la surface) connu aujourd'hui sous le nom de « *problème de Boussinesq* ».

Boussinesq s'intéresse enfin à l'équation

$$(3) \quad \phi_{tttt} = -\phi_{xx},$$

qui peut être prise comme une version de l'équation (1) linéarisée écrite dans un repère en mouvement : sa solution peut ensuite être prise comme solution fondamentale pour le problème de l'immersion (ou de l'émergence) brutale d'un objet solide dans l'eau. Elle fournit au problème de l'onde de surface une gamme de solutions qui ne figuraient pas dans le mémoire de 1877.

Tous ces résultats sont publiés dans un mémoire (1885) qui reflète très bien la manière de travailler de son auteur. Boussinesq est alors dans la plénitude de ses moyens. Il livre tout d'abord, pour l'annonce et la crédibilité de son travail, une collection (parfois assez copieuse) de notes à l'Académie des Sciences. Celles-ci préparent le lecteur au travail définitif. Il publie ensuite un mémoire qui se présente souvent comme un « pavé » (pour le présent problème : 722 pages) dans lequel il expose non seulement le détail du travail, mais aussi le cheminement de sa réflexion, et celle-ci digresse assez souvent sur des sujets qu'il voudrait annexes, mais qui se révèlent souvent, au fil de la lecture, beaucoup moins annexes que ne le voudrait l'auteur. Dans cette monographie (*réf.* [16]), après l'objet principal du travail (318 pages), il traite dans une « annexe » de 404 pages (!) les équations des vibrations des plaques, puis celles des barres (qui sont solutions de la même équation (3)), puis l'équation de Boussinesq des ondes de surface dans les liquides, qu'il avait publiée dans le cas non linéaire en 1877. C'est donc son premier travail d'importance sur l'élasticité (après quelques travaux de moindre envergure, *voir réfs* [5] et [12]) et il ne s'arrêtera pas là, *voir par exemple réf.* [26]) : ses travaux dans le domaine seront reconnus à leur mesure par ses successeurs (*voir* Timoshenko, 1953). On comprend bien

l'enchaînement de sa pensée guidée par la structure des solutions qu'il recherche. Mais on ne peut pas s'empêcher de penser que plusieurs mémoires distincts auraient également pu convenir, l'un consacré à son problème mathématique et les autres aux applications ⁽¹⁸⁾.

L'équation BBO et les solutions potentielles sont les derniers travaux scientifiques lillois de Boussinesq : en effet dans sa séance du 18 janvier 1886, l'Académie des Sciences vient de l'élire au fauteuil d'Eugène Rolland (décédé en 1885). Cette élection, suivant la règle de l'époque, impose à l'impétrant d'habiter Paris : Boussinesq cherche donc une mutation ⁽¹⁹⁾, qu'il obtient cette même année 1886 : il est alors nommé *Professeur de Mécanique physique et expérimentale à la Faculté des Sciences de Paris* .

Paris et l'Académie des Sciences

Ce n'est pas Rastignac qui arrive à Paris en ce début 1886. Boussinesq, personnage de présentation un peu effacée, ne peut même pas être accueilli par son ancien maître Saint-Venant : pirouette du hasard, celui qui l'a soutenu avec tant de persévérance depuis ses débuts à Agde jusqu'à l'Académie des Sciences s'est éteint le 6 janvier à l'âge de 89 ans, douze jours avant l'élection de son élève. Lorsque Boussinesq est accueilli par ses nouveaux confrères, c'est pour composer (en compagnie d'Alfred Flamant, l'autre élève favori de Saint-Venant) la nécrologie de son ancien maître. Ces événements contribuent bien évidemment à le replier sur lui-même : il se réfugie dans un travail de plus en plus acharné.

A la Sorbonne, Boussinesq reste Professeur de Mécanique physique et expérimentale pendant 10 ans ⁽²⁰⁾, jusqu'à ce qu'en 1896 il hérite de la chaire, mieux considérée, de *Physique mathématique et Théorie des Probabilités* ⁽²¹⁾ : il conservera cette chaire jusqu'à sa retraite, qu'il prend en 1918 à l'âge de 76 ans ⁽²²⁾. Comme Professeur il rédigea plusieurs ouvrages pédagogiques (*réfs.* [17] et [18] par exemple, mais d'autres également).

C'est bien comme Académicien que le chercheur Boussinesq donne sa mesure. Dans le domaine des écoulements turbulents tout d'abord, il reprend ses recherches lilloises : la maturation des idées apparaîtra immédiatement, en même temps que le progrès général accompli

⁽¹⁸⁾ Que dire, aussi, des titres, eux-mêmes souvent des romans fleuves ! toujours pour la monographie *réf.* [16], le titre complet est le suivant : "*Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent dans ces solides des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur*". Suit un sous-titre : "*Mémoire suivi de notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*".

⁽¹⁹⁾ N'imaginons surtout pas que cette opération se passa dans la précipitation : Boussinesq était déjà averti qu'il serait bientôt Académicien, et depuis 1880 il remplissait des « notices » à cette fin (*voir réf.* [14]). Préparant ses arrières, il donnait à la Faculté des Sciences de Paris comme chargé de cours depuis la rentrée d'octobre 1885 le cours de *Mécanique physique et expérimentale*.

⁽²⁰⁾ C'est dans ce poste qu'il suivra en 1890, comme rapporteur, la thèse d'un Mécanicien expérimentateur qui, par de nombreux côtés lui ressemble beaucoup : Maurice Couette (1858-1943).

⁽²¹⁾ Il s'agit bien d'un *héritage* : c'est un jeu de chaises musicales qui procura à Boussinesq en 1896 la chaire de Physique mathématique. L'astronome Félix Tisserand étant décédé en 1896, les universitaires parisiens ne trouvèrent qu'Henri Poincaré qui « soit en mesure d'occuper » (!) la prestigieuse chaire d'Astronomie. Conduits par Gaston Darboux, ils proposèrent alors de confier à Boussinesq la chaire de Physique mathématique qu'occupait précédemment Poincaré.

⁽²²⁾ Avant de juger qu'il s'agit d'un âge avancé, rappelons-nous qu'entre 1914 et 1918 les hommes plus jeunes sont occupés ailleurs ...

en dix ans dans la communauté scientifique. Peut-être cherche-t-il à reprendre ses œuvres de jeunesse lorsque il aborde l'étude de la chaleur ? en tout cas c'est là qu'il fournit sa contribution scientifique maîtresse en formulant l' « Approximation ». Examinons successivement ces deux problèmes.

(a) **La turbulence, deuxième phase : l' « hypothèse de Boussinesq »**. Entre 1876 et 1897, deux découvertes fondamentales ont été faites dans le domaine de la Mécanique des fluides incompressibles : la première (1883) est due à l'Anglais Osborne Reynolds (1842-1912), publiée dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*, et suivie de plusieurs publications de moindre importance (*Phil. Trans.*, 1894, par exemple). La deuxième est l'expérience de Maurice Couette (1890) : celle-ci arrive comme une seconde justification de la validité des équations de Navier-Stokes ⁽²³⁾ tout en confirmant également l'existence des écoulements turbulents ⁽²⁴⁾.

L'expérience de Reynolds est bien connue, et on en trouve aujourd'hui la description dans tous les livres. Peut-être le bonheur de Reynolds a-t-il été, dans ses expériences, de reconnaître des structures cohérentes lorsque il explorait le domaine turbulent de l'écoulement ? Quoi qu'il en soit, sa grande innovation est de décomposer les variables, dans la représentation de l'écoulement, en *valeurs moyennes* et *fluctuations*. Il montre que les valeurs moyennes suivent les équations de Navier-Stokes à condition que la loi contrainte-déformation moyenne comporte un terme supplémentaire provenant des fluctuations : ce terme, de nature tensorielle, est aujourd'hui appelé *tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds*. En revanche, il n'a aucun moyen de modéliser ce tenseur : il vient de poser le problème fondamental de la turbulence, qui est le « problème de la fermeture ».

Boussinesq reprend ses recherches lilloises, et il se met à lire ⁽²⁵⁾ les mémoires expérimentaux de Bazin avec une attention accrue. Il commence par adopter (bien qu'il ne s'étende pas sur sa nouvelle écriture) la décomposition de Reynolds en variable moyennée additionnée à une fluctuation ⁽²⁶⁾. Examinant ensuite les mesures de Bazin, c'est de ces mesures qu'il déduit que le cœur du problème de la turbulence se trouve dans le voisinage des parois (on

⁽²³⁾ Soulignons que l'expérience de Couette, comme celle de Poiseuille, ne concerne que les fluides incompressibles. Elle n'est donc en mesure d'identifier (et, donc, de mesurer) que le coefficient de viscosité μ . Le second coefficient de viscosité λ ne pourra jamais être mesuré. Ce sont les principes de la thermodynamique (la dissipation doit être positive, ce qui entraîne l'inégalité $3\lambda + 2\mu \geq 0$), qui imposent aux savants de ne pas l'ignorer. En désespoir de cause, les physiciens supposeront que $3\lambda + 2\mu$ est nul, ce qui donne une valeur à λ : le fluide correspondant sera désigné par *fluide de Stokes*.

⁽²⁴⁾ Il semble que l'expression « *écoulement turbulent* » soit due (1909, tome 1, p. 36) au physicien Auguste Boulanger (1866-1923). Boussinesq parle d' « *écoulement tumultueux* » et Reynolds d' « *écoulement sinueux* ». Le mot « *turbulent* », de la même famille que « *tourbillon* », rappelle que la turbulence est associée à une propriété de l'écoulement d'être « *tourbillonnant* », c'est-à-dire rotationnel : cette propriété se retrouve elle-même dans les écoulements cisailés.

⁽²⁵⁾ A cet égard la lecture du mémoire de Boussinesq (*réf.* [20]) est elle-même très instructive par la justification des hypothèses formulées par son auteur : Boussinesq s'appuyait d'extrêmement près aux mesures réalisées par Bazin (1865). Henri-Emile Bazin était réputé l'un des expérimentateurs les plus précis et les plus fiables de son époque, et il fallait certainement cette réputation pour cautionner l'usage que fit ensuite Boussinesq de ses résultats.

⁽²⁶⁾ Il semble bien que ce soit la décomposition faite par Reynolds qui ait donné à Boussinesq le déclic qui lui manquait pour formuler la « loi de comportement » qu'il subodorait en 1872 (apparition de termes qui ne figureraient que dans les écoulements suffisamment *rapides* [en réalité : *instationnaires*] mais qu'il n'avait pas d'outil cohérent pour formuler).

dirait aujourd'hui : dans la région de cisaillement maximum de l'écoulement). Boussinesq étudie donc ce voisinage avec attention. Il l'étudie dans les cas que lui fournissent les mesures de Bazin : d'abord l'écoulement uniforme dans un canal à section rectangulaire, ensuite dans un canal à section circulaire, puis pour un écoulement à profil cisailé (travaux publiés dans *réf.* [20]).

L'idée de Boussinesq (qui reprend celle qui sous-tendait son mémoire de 1872, *réf.* [6]) est de représenter la contribution des termes turbulents par un coefficient de frottement, disons ε , qui intègre la contribution des fluctuations dans l'équation de l'écoulement moyen. Il pose donc pour celui-ci l'équation

$$(4) \quad \rho g J + \varepsilon d^2 u / dz^2 = 0,$$

où u désigne la vitesse moyenne longitudinale (suivant l'axe des x) et J la pente de la ligne piézométrique (égale à la quantité $\partial/\partial x\{p/(\rho g)\}$), constante si l'écoulement moyen est uniforme). Le problème est d'estimer ε . Des considérations qualitatives et des comparaisons aux résultats de Bazin lui font adopter des hypothèses sur les paramètres définissant ce coefficient : pour un canal à section rectangulaire par exemple, il le suppose proportionnel à l'épaisseur h du bassin et à la vitesse u_0 du fluide sur la paroi. Normalisant par ρg il écrit

$$(5) \quad \varepsilon = \rho g A^* h u_0.$$

Dans le cas d'une conduite à section circulaire, observant que le taux de turbulence est plus fort sur l'axe qu'à la périphérie⁽²⁷⁾, il choisit

$$(6) \quad \varepsilon = \rho g A^* (D/4) u_0 (R/r),$$

où D désigne le diamètre de la conduite et r/R la distance du point au centre normalisée par le rayon. Le problème est désormais d'évaluer A^* : dans les deux cas (5) et (6), Boussinesq ramène ce calcul à celui d'un autre coefficient, puis il détermine les valeurs du coefficient A^* en calibrant ses valeurs numériques sur les données de Bazin.

L'*hypothèse de Boussinesq* auréola son auteur d'un prestige considérable, surtout lorsque, par la suite, Bazin (1902) confirma par l'expérience les formules de Boussinesq. Celles-ci conduisaient notamment à un profil de vitesses, dans les conduites circulaires, proportionnel à $(r/R)^3$, proportion que retrouva Bazin. Cette hypothèse fut prise en considération par Prandtl (1875-1953) qui l'améliora en 1904 pour proposer, dans les écoulements de couches-limites, la variante appelée aujourd'hui « *longueur de mélange de Prandtl* ». Prandtl put ainsi se débarrasser, dans des formules comme (5) et (6), de la référence à la « vitesse u_0 à la paroi » qui était incompatible avec les *conditions d'adhérence*⁽²⁸⁾, conditions que mettaient alors tout juste en évidence les expériences d'Hele-Shaw (1898). Prandtl développa pour cela l'hypothèse d'une couche-limite laminaire à la paroi, séparant un écoulement de vitesse u_0 (hors de cette couche-limite) d'un écoulement de vitesse nulle (à la paroi).

(b) Une théorie analytique de la chaleur : l' « Approximation de Boussinesq » . Voulut-il reprendre ses travaux de jeunesse, ou plus simplement se mettre au goût du jour ? En tout cas, Boussinesq publie, en 1901 et 1903, une série de deux de ces pavés dont il avait le secret (*réfs.*

⁽²⁷⁾ Le détail des calculs conduisant aux formules (5) et (6) se trouve dans (*réf.* [19]). Une analyse de similitude assortie de l'utilisation du théorème de Vaschy-Buckingham conduirait probablement aujourd'hui au même résultat, mais ce théorème ne sera connu qu'en 1914.

⁽²⁸⁾ C'est à Prandtl (1904) que l'on doit la formule « *hypothèse de Boussinesq* ». Pour Boussinesq, la vitesse u_0 non nulle dépendait elle-même d'un coefficient de rugosité de la paroi que Boussinesq reliait à un frottement sec de Coulomb exercé par la paroi sur le fluide.

[21], [22]). Au total plus de mille pages sur un sujet que n'avaient pas économisé, avant lui, nombre de ses prédécesseurs : la modélisation de la diffusion de la chaleur. Mais les travaux connus à ce jour sur la chaleur, dus à Fourier (1768-1830), Péclet (1793-1857), Clausius (1822-1888), Lamé ... , en concernent essentiellement la diffusion statique dans les solides. De toute évidence, le mémoire de Boussinesq n'a pas au départ pour ambition une révolution scientifique ⁽²⁹⁾ : dans le premier volume (1901), il ne fait que synthétiser ce qu'ont fait ses prédécesseurs. C'est dans le second volume (1903), dont 198 pages seulement concernent son véritable sujet, qu'il pénètre dans un domaine réellement inexploré : la convection hydrodynamique ⁽³⁰⁾.

La diffusion non statique de la chaleur et ses effets thermodynamiques dans les fluides sont devenus en effet des problèmes d'actualité : en 1887 Pierre-Henri Hugoniot (1851-1887) a donné sa théorie analytique des fluides compressibles, et en 1889 Ernst Mach (1838-1916) a réalisé les premiers « *schlieren* » ⁽³¹⁾ dans les tuyères. Mais surtout Henri Bénard (1874-1939), attirant l'attention sur les effets de l'échauffement dans les liquides pesants, vient de publier (1900) un travail expérimental dans lequel il a mis en évidence de bien curieux effets de convection : il s'agit de ce que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de « cellules de Bénard » . Celles-ci, qui sont des figures prismatiques à section horizontale hexagonale, ne se forment dans le milieu que lorsque le gradient vertical de température atteint un certain seuil. Malheureusement Bénard, par ailleurs brillant physicien, n'a pas été en mesure d'expliquer le phénomène.

C'est tout ingénument que, dans son volume de 1903, Boussinesq énonce pour la première fois les conditions dans lesquelles s'applique la célèbre « Approximation » : « *Il fallait encore observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant dans les calculs leur produit par celle-ci* » ⁽³²⁾. On ne sait pas si l'ambition de Boussinesq est de permettre de modéliser le

⁽²⁹⁾ Boussinesq s'explique des changements progressifs d'orientation de son livre, faits pour certains en relisant les épreuves de son manuscrit (!), dans l'avant-propos du second volume.

⁽³⁰⁾ Suivant son habitude, Boussinesq fait suivre son mémoire de deux « annexes » : l'une, de 68 pages, est intitulée « *Sur la résistance opposée aux petits mouvements d'un fluide indéfini par un solide immergé dans ce fluide* ». Cette annexe est l'exposé développé de réf. [15]. L'autre annexe, de 360 pages (!) est consacrée à la théorie des ondes lumineuses, et pourrait sans dommage être publiée dans un mémoire séparé (il s'agit, en fait, du mémoire qu'il avait préparé initialement pour être sa thèse et qu'il n'avait jamais publié, voir note 6).

⁽³¹⁾ Les « *schlieren* » (de l'allemand « *schliere* », *raie*) sont les représentations photographiques des rayons de propagation (lignes de Mach) dans un écoulement supersonique (donc de fluide compressible), visualisés par application d'une propriété de variation de l'indice de réfraction du fluide en fonction de la vitesse (et donc de la direction de propagation du rayon). En visualisant ces rayons, Mach valide la théorie d'Hugoniot.

⁽³²⁾ *Avertissement* de réf. [22], p.vii. Cet extrait a été très justement souligné par R. Zeytounian (2003a, b). Mais les deux ou trois phrases qui précèdent celle-ci dans l'*Avertissement* sont également très révélatrices : Boussinesq s'y explique sur les raisons qui l'ont conduit à formuler son Approximation, sur le rôle qu'ont joué dans son inspiration les travaux de ses prédécesseurs Fourier et Poisson (excusez du peu), et sur la place de son propre énoncé par rapport à ces travaux. Citons-en notamment l'extrait (p. vi) : « *Quant aux fluides, où les mouvements visibles peuvent être très étendus même sous l'influence de faibles causes, l'équation caractéristique de leurs températures à adjoindre aux équations ordinaires de l'hydrodynamique, a été donnée en premier lieu par Fourier (dans un mémoire posthume) sous une forme au fond suffisante pour les questions abordables, mais qu'une légère inadvertance de son immortel auteur a inutilement compliquée quelque peu. Poisson*

problème de Bénard. Il se contente d'ajouter que la question de l'intégration des équations « *n'est plus inabordable* ». Mais il met incontestablement le doigt sur la spécificité de ce problème : si, utilisant des variables sans dimension comme on le fait aujourd'hui, il introduisait les nombres caractéristiques qui entrent en jeu, il constaterait que le *nombre de Froude* (c'est-à-dire les effets de pesanteur) se trouve en compétition avec le *nombre de Mach* (qui caractérise la compressibilité). En fait, ignorant toujours l'analyse dimensionnelle, il n'a pas pu voir non plus qu'il vient de mettre en évidence une singularité mathématique qui figure dans son problème. De plus, comme pour le problème des ondes de surface, cette première compétition est insuffisante pour caractériser son approximation : il s'y joint une seconde condition que Boussinesq exprime comme suit : « *le poids ρg de l'unité de volume [...] aura décru sensiblement de $\rho g \alpha \theta$, comme s'il s'était adjoint au poids primitif ou normal de l'unité de volume la petite force antagoniste, c'est-à-dire ascensionnelle $\rho g \alpha \theta$ proportionnelle à l'échauffement θ mais dirigée vers le haut* » (p. 174 : θ désigne, dans cet énoncé, l'écart de température à sa valeur dans l'état d'équilibre).

L'ensemble de ces deux phrases, qui impliquent l'incompressibilité générale du milieu, constitue ce que l'on appelle aujourd'hui l'« *Approximation de Boussinesq* ». Cette approximation passe, à sa publication, relativement inaperçue : son objet est essentiellement de permettre d'obtenir plus commodément les solutions d'équations qui, sans l'approximation, resteraient très difficiles d'accès. Mais Boussinesq est coutumier de simplifications fondées sur l'observation et le réalisme expérimental. Ainsi dans un premier temps, l'Approximation ne compte-t-elle que parmi les curiosités de la Science : cela dure jusqu'à ce que Rayleigh (à nouveau lui !), cherchant à modéliser (1916) les mouvements de convection que Bénard avait mis en évidence dans ses expériences, utilise à cet effet l'Approximation. Bien que Rayleigh ait fait une légère erreur dans la définition de son problème, il obtient des résultats qualitativement assez conformes à ceux qu'avait trouvés Bénard⁽³³⁾ : sous l'influence de l'échauffement, le fluide, retenu par la viscosité, ne se met en mouvement que lorsque un paramètre significatif concrétisant le gradient de température (aujourd'hui : le « *nombre de Rayleigh* ») atteint un certain seuil. Ainsi c'est la modélisation de Rayleigh qui fera la publicité de l'approximation de Boussinesq.

Boussinesq a-t-il eu conscience, lorsque il a formulé son Approximation, de la portée qu'aurait son idée ? il est impossible de le savoir : d'une part en effet, il ne fait, en la formulant, que mettre en pratique la « *méthode* » qu'il avait déjà mise en œuvre pour d'autres problèmes. D'autre part, il la positionne avec minutie par rapport aux travaux de savants que de toute évidence il admire et respecte (*voir* note 32 de bas de page), d'une manière qui indique qu'il est conscient de la place qu'elle pourra prendre par la suite. Quoi qu'il en soit, plus que l'Approximation elle-même, c'est surtout le champ qu'elle a permis d'explorer qui était sensible.

l'a retrouvée sous sa forme exacte et réduite ». Boussinesq détaille plus longuement par la suite (p. 158-159) la légitimité de la dépendance linéaire de la variation de ρ par rapport à celle de θ et rend une nouvelle fois hommage à Poisson pour la justification pratique de cette hypothèse, que Boussinesq dit avoir lui-même puisée dans son livre « *Théorie mathématique de la chaleur* » (1835). On peut noter, en revanche, que nulle part ne figure de référence au travail (1879) d'Oberbeck (1846-1900) sur le même sujet.

⁽³³⁾ On sait aujourd'hui (*voir*, par exemple, S. Chandrasekhar, 1961), que la convection qu'avait réellement observée Bénard mêlait aux effets de convection thermique des effets de tension superficielle que n'a pas pris en compte Rayleigh dans sa modélisation. On appelle aujourd'hui « *convection de Rayleigh-Bénard* » la convection telle que l'a modélisée Rayleigh, tandis que l'expérience de Bénard était une convection appelée aujourd'hui « *convection de Bénard-Marangoni* ». On doit noter avec modestie que la convection de Bénard-Marangoni (et bien d'autres ensuite) n'aurait jamais pu être modélisée si l'on n'avait pas modélisé en premier lieu celle de Rayleigh-Bénard !

On connaît d'autres domaines de la Physique où l'on a rencontré de telles situations ⁽³⁴⁾.

C'est progressivement que le monde scientifique a réalisé l'importance de ce qu'avaient trouvé (conjointement) Bénard, Boussinesq et Rayleigh. En effet les cellules de Bénard sont des figures que l'on rencontre dans la nature dans une multitude de circonstances : convection d'un liquide, écoulements météorologiques, effets dynamos, et jusqu'aux cellules de dessèchement des sables dans le désert. Ces phénomènes, étudiés principalement dans la deuxième moitié du XX^e siècle, justifient que l'Approximation soit devenue si populaire dans cette dernière période.

Les dernières années d'un savant solitaire

Jusqu'à sa retraite en 1918, Boussinesq poursuivra ses publications au rythme soutenu qui l'a toujours caractérisé. Ses recherches (*voir réfs.* [23] à [33], liste non exhaustive) concernent des problèmes très variés : aux thèmes qu'il étudie depuis sa jeunesse (*réfs.* [25], [26], [31], [32]), il joint des sujets nouveaux : ondes longitudinales dans les tubes élastiques [23], écoulement d'un déversoir [24], effets capillaires [27], [28], [33], ou filtrage de l'eau dans les sables [29]. Les réflexions philosophiques ont toujours cours (*réf.* [30]). Il publie également ses cours de Sorbonne, que l'on peut comparer à nos modernes « polycopiés » et livres pédagogiques. On peut signaler aussi à cet égard le livre d'*Hydraulique générale* en deux volumes d'Auguste Boulanger (1909) dont l'objet annoncé est de faire une synthèse à caractère pédagogique et utilisable par des ingénieurs, des découvertes de Boussinesq depuis 1871 ⁽³⁵⁾ en Mécanique des fluides.

Comme nous l'avons signalé plus haut, Boussinesq prend sa retraite universitaire en 1918. A cette date, il est très seul. Marié à trois reprises, il n'a pas eu d'enfants, et il a divorcé de sa troisième épouse depuis neuf ans ⁽³⁶⁾. Alfred Flamant a disparu depuis 1914, et on ne lui connaît pas d'autre ami proche. De nature très renfermée, il se réfugie dans une solitude de plus en plus pesante. Ses dernières années ne sont évoquées, par son collègue Emile Picard dans son discours de 1933, que sur le plan académique. Mais, même sur ce seul plan, Picard souligne le repli sur lui-même et l'introversion d'un collègue qui, de nature, n'avait jamais été très expansif.

⁽³⁴⁾ Citons l'exemple, contemporain de Boussinesq, de la formulation du second principe de la thermodynamique par Duhem (1861-1916) : ce principe, applicable à tous les milieux à structure continue, peut n'avoir paru, à son énoncé (1911) que comme un raffinement de ce qu'avant Duhem, avait dit Clausius. La formulation de Duhem concluait que la dissipation, forme bilinéaire de variables duales, devait être positive quelle que soit la transformation imposée au milieu (le mouvement étant l'une de ces possibles transformations). C'est plus de cinquante ans plus tard (1945) qu'Onsager, appliquant cet énoncé à l'écriture de lois phénoménologiques, en déduisit ces lois pour les milieux classiques : la loi de Navier-Stokes figure parmi les applications les plus simples.

⁽³⁵⁾ Auguste Boulanger, qui n'était pas au sens strict un « ancien élève » de Boussinesq, était alors Professeur de Mécanique à Lille, avant d'être plus tard (1914) Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers. Il publia son livre d'*Hydraulique générale* chez Doin en 1909, dans le cadre d'une « *Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie* » dirigée par Maurice d'Ocagne. L'objet de cette collection était de mettre à la portée d'un public ingénieur les résultats les plus récents obtenus dans le domaine des sciences technologiques. Le livre de Boulanger constitue une véritable « explication de textes » d'un ensemble de plus de soixante publications de Boussinesq consacrées uniquement à la Mécanique des fluides, parues entre 1867 et 1909. Il traite essentiellement des problèmes d'ondes de surface, de turbulence et de mouvements mettant en jeu la viscosité : l'*Approximation*, qui ne connaîtra une réelle diffusion qu'à partir du travail de Rayleigh en 1916, est encore trop récente pour être entrée dans les applications.

⁽³⁶⁾ Boussinesq épousa successivement Jeanne Giscard de la Roque (1867), décédée en 1894 ; Claire Onfroy de Vérez (1895) décédée en 1905 ; Jeanne Le Bouteiller (1906) dont il divorça en 1909. Aucun de ces mariages n'a donné d'enfants.

On ne peut pas ne pas se poser de questions : on aimerait, par exemple, savoir quelles ont pu être ses relations avec ses collègues de l'Académie, comme, disons, Henri Poincaré ⁽³⁷⁾, de douze ans son cadet, mais qu'il a vu pourtant disparaître en 1912. Picard souligne toutefois que sa solitude ne reflétait pas d'amertume ou d'aigrissement : Boussinesq, de tempérament craintif, ne s'est jamais mêlé au monde, mais ne le juge pas sévèrement pour autant. Chaque jour, presque jusque à ses derniers jours, il viendra occuper la même table à la Bibliothèque de l'Académie : c'est celle-ci qui est son lien avec le monde extérieur.

Boussinesq s'éteint à Paris le 19 février 1929. Hormis les témoignages que l'on a d'une vie très solitaire, on ne peut pas en dire beaucoup plus sur ses dernières années : comme ses premières années et comme sa vie privée, elles restent nimbées d'un halo de mystère.

L'héritage moderne de Boussinesq

A cent ans de distance, essayons de comprendre ce qui reste aujourd'hui de ces formules que nous avons visitées et énumérées plus haut.

La marque essentielle du talent de Boussinesq est incontestablement la finesse et l'extraordinaire intuition avec laquelle il sut démêler, dans un monceau d'expériences comme on en trouva au XIX^e siècle sur des sujets aussi nombreux que désordonnés, les points essentiels qui en permirent l'interprétation et qui autorisèrent à en déduire une modélisation cohérente, même si, parfois, cela se fit au prix d'hypothèses que, sur le terrain, il ne sut pas toujours justifier. Il y acquit une image que sa modestie l'empêcha de mettre en valeur avec le rayonnement qui aurait pu l'accompagner. Cependant (et il est probable que c'est là, comme ce fut le cas après lui pour Duhem, son plus grand handicap), son intérêt ne se porta que vers des problèmes de Physique macroscopique, à une époque où le grand problème de la Physique devenait l'exploration de l'atome. Ainsi, comme ce fut aussi le cas pour Duhem, son souvenir s'estompa dans les années qui suivirent sa mort. Ce n'est que dans les trois ou quatre dernières décennies du XX^e siècle que l'intérêt porté à nouveau par la recherche fondamentale à la Physique macroscopique (développement et connaissance de matériaux nouveaux, maîtrise accrue des comportements dynamiques des milieux à rhéologie complexe ⁽³⁸⁾ etc.) a permis de rendre à ces savants leur place.

L'Approximation est de toute évidence la part la plus volumineuse de l'héritage de Boussinesq. Restée mystérieuse pendant toute la première moitié du XX^e siècle (les chercheurs de cette période tentaient plutôt de comprendre comment pouvaient se former, dans les écoulements de Bénard, des cellules de convection hexagonales plutôt que rectangulaires, ou même des rouleaux), il est probable qu'elle ne serait restée, comme je l'ai dit plus haut, qu'une curiosité, si elle n'avait suivi elle-même le destin de la convection de Bénard. Cette convection a été reconnue, en effet, assez rapidement, comme l'un des moteurs d'un phénomène que l'on rencontre dans la nature dans les circonstances les plus variées (*voir* par exemple le livre de M. Lesieur, 2000). C'est ainsi que les météorologues, qui firent de leur discipline une science à partir des années 1925 (à peu près), reconnurent très tôt la nature convective de nombreux phénomènes météorologiques courants : par exemple la formation des nuages dans l'atmo-

⁽³⁷⁾ On peut trouver dans les archives de l'Académie des exemplaires de correspondance entre les deux savants, par exemple une lettre de Poincaré (1891) demandant son avis à Boussinesq sur une thèse dont lui-même, Poincaré, subodorait qu'elle était erronée, mais qu'il ne voulait pas rejeter sans l'avis d'un collègue.

⁽³⁸⁾ Un exemple est celui des comportements double diffusifs, qui gouvernent la diffusion des polluants dans des milieux naturels comme l'océan et l'atmosphère.

sphère. Décrire un tel phénomène par une convection de Bénard nécessitait une analyse des équations plus rigoureuse que celle qu'avaient faite aussi bien Rayleigh que Boussinesq⁽³⁹⁾. Il fallut donc chercher les racines profondes de ces équations, et celles-ci ont été trouvées dans leur formulation asymptotique⁽⁴⁰⁾, plus stricte que les simples évaluations numériques qui avaient inspiré Boussinesq. C'est à partir des années 1970 que des explications ont été trouvées sur le plan formel, en même temps qu'elles indiquaient à la fois dans quelles directions il fallait rechercher les cas « non-Boussinesq » (comme on dit aujourd'hui) et quels pouvaient être ces cas (l'approximation *anelastique*, par exemple, en est un). Effets indirects de l'analyse asymptotique, on découvrit ensuite d'autres champs d'application de l'Approximation (les *ondes de gravité internes* par exemple)⁽⁴¹⁾. Enfin une dernière motivation de la renaissance, dans la recherche, d'un « effet Boussinesq », est peut-être l'émergence, dans la Science actuelle, d'une préoccupation du sauvetage de notre patrimoine environnemental : la modélisation du réchauffement de la planète passe, elle aussi, par l'approximation de Boussinesq.

Les conditions de validité de l'Approximation n'ont pas été les seules conclusions qu'ont données ces recherches : la convection de Bénard a pu être reconnue comme l'un des modèles les plus simples pour décrire les phénomènes d'instabilité, la convection linéaire conduisant à la formation de rouleaux horizontaux, et les cellules de Bénard se révélant elles-mêmes comme des dégénérescences de ces rouleaux par accumulation de non-linéarités. Ces cellules peuvent elles aussi dégénérer en figures de plus en plus instables, et devenant progressivement turbulentes. En définitive, l'approximation de Boussinesq est le préalable incontournable pour décrire, à travers la convection de Bénard, le phénomène appelé « *la transition vers la turbulence* ». Il n'est pas interdit de rêver : aujourd'hui, aux premiers jours du XXI^e siècle, le problème de la validité des équations de Navier-Stokes est toujours ouvert⁽⁴²⁾. Résoudre la question de la transition vers la turbulence serait probablement le premier pas vers la solution de ce problème. On voit donc là encore l'importance qu'a prise, même si c'est à son corps défendant, la modeste approximation de Boussinesq.

Etroitement lié au problème de la validité des équations de Navier-Stokes, se trouve celui

⁽³⁹⁾ On peut citer, par exemple, la question suivante : comment démontrer que, la convection de Rayleigh-Bénard étant essentiellement un phénomène en milieu peu profond, son modèle s'applique à la convection atmosphérique, qui s'établit elle-même dans des milieux de hauteur infinie ?

⁽⁴⁰⁾ Les justifications asymptotiques de l'approximation de Boussinesq sont dues en particulier à une solide école française (disons même : *lilloise*), avec les travaux de Zeytounian (1974) et de l'auteur de cet article (Bois, 1976), travaux suivis dans les deux cas de nombreux autres.

⁽⁴¹⁾ On a même trouvé mieux : l'étude mathématique de l'Approximation faite à partir des années 1970, si elle a bien défini un cadre mathématique pour la formuler, a montré en même temps que l'écriture qu'en avaient faite Rayleigh et ses successeurs (y compris Chandrasekhar !) *n'était pas asymptotiquement cohérente*. Saint-Venant (voir M. Parreau, 2004) reprochait constamment à Boussinesq un manque de précision mathématique dans ses démonstrations, manque de précision dû lui-même à ce que Boussinesq entrevoyait assez souvent un résultat au-delà du formalisme qui y conduisait. Si une maîtrise plus affirmée des outils asymptotiques qu'ils utilisaient avait inspiré tant Boussinesq que Rayleigh, il est bien possible qu'ils n'eussent pas formulé, et encore moins utilisé l'Approximation, dont le manque de rigueur dans l'énoncé de 1903 a beaucoup perturbé leurs successeurs de la première moitié du XX^e siècle. Pendant une bonne cinquantaine d'années, la seule justification de l'Approximation est resté sa concordance avec les résultats expérimentaux auxquels on la confrontait.

⁽⁴²⁾ Le *Clay Mathematics Institute* (Université de Princeton) a proposé en 2000, sur le modèle des 23 problèmes de Hilbert en 1900, un prix (un million de dollars) pour sept problèmes de mathématiques qui devraient intéresser le XXI^e siècle. Le problème n° 6 (Ch. Fefferman, 2000) concerne l'« *Existence et régularité des équations de Navier-Stokes* ». Avis aux amateurs !

de la fermeture turbulente : l' « *Hypothèse de Boussinesq* » (on dit aussi « *longueur de mélange* ») est aujourd'hui l'une des fermetures enseignées dans tous les livres de Mécanique des fluides traitant de turbulence. En fait, il faut bien convenir que c'est surtout sa simplicité qui fait son intérêt. Prandtl présenta lui-même cette hypothèse en 1904, afin de mieux sous-tendre son propre modèle de fermeture (qui, comme nous l'avons vu, améliorait l'hypothèse de Boussinesq) : constatant l'importance du cisaillement des écoulements dans l'apparition de la turbulence, Prandtl proposait une fermeture qui prenait en compte ce cisaillement au voisinage des parois, et dont l'avantage était de respecter la condition de vitesse nulle sur celles-ci. Quoiqu'il en soit, compte tenu des progrès qu'a fait l'étude de la turbulence à partir de 1941 avec les travaux de Kolmogorov (1903-1987), on peut considérer aujourd'hui que la fermeture de Prandtl, aussi bien que celle de Boussinesq, ne sont plus que des modèles d'école. Leur intérêt est essentiellement de donner des estimations rapides de solutions turbulentes. Mais la recherche en turbulence s'intéresse aujourd'hui à d'autres aspects : méthodes spectrales, fermetures à plusieurs points etc.

Pour en terminer avec la Mécanique des fluides, nous avons dit dans un paragraphe précédent que l' « *équation BBO* » gouvernait le mouvement des particules flottant dans l'air : c'est peu dire que souligner l'importance qu'elle a acquise dans l'industrie chimique actuelle (décantation, aérosols, transport de matériaux poussiéreux) et dans la protection de l'environnement (envol, transport et diffusion de particules polluantes, comportement des aérosols de la haute atmosphère). Plus concrètement le problème BBO est aujourd'hui à la base de la validation de techniques hautement performantes comme les méthodes de vélocimétrie holographique en Mécanique des fluides (voir par exemple Dadi & al., 1991).

Disons quelques mots sur les problèmes d'élasticité (barres et plaques) : s'ils figurent moins dans les recherches actuelles, c'est bien parce que presque tous ces problèmes sont, aujourd'hui, devenus des classiques : c'est ainsi que l'on trouve dans les livres didactiques des références au « *tenseur de Boussinesq* » (Germain, 1988), à la « *solution de Boussinesq* » (Timoshenko & Goodier, 1970) etc. Arrêtons-nous quelques instants sur ces problèmes « devenus classiques » : traitant bien souvent d'équations linéaires, leurs solutions représentent aujourd'hui autant d'outils solides pour résoudre les problèmes concrets auxquels se rattachent ces équations. Des théories modernes (essentiellement celle des *distributions*, Schwartz, 1948) permettent de les formuler dans un cadre mathématique rigoureux. Si nous pouvons remercier nos collègues mathématiciens pour avoir su en formaliser l'étude, il faut pourtant aussi penser aux savants comme Boussinesq, d'inspiration plus proche de la Physique, qui, à force de résoudre des systèmes linéaires par une méthode qui devenait progressivement universelle, ont pu donner aux mathématiciens l'idée d'en rechercher l'expression mathématique : bel exemple d'osmose, via la *Mécanique*, entre *Physique* et *Mathématiques*. Dans le *problème de Boussinesq*, la solution singulière en un point donnée par Boussinesq n'est pas identifiée comme une « solution canonique », ni même comme une *fonction de Green* (1793-1841 : celles-ci avaient été découvertes par ce dernier en 1828). Plus modeste, Boussinesq se contente d'interpréter son formalisme comme une « méthode des sources ».

Une grande qualité du *problème de Boussinesq* (le problème dit « du poinçon ») est sa *simplicité* : parmi les résultats pratiques que l'on peut en extraire figure par exemple la relation entre la *profondeur d'enfoncement* du poinçon (pour un chargement donné) au *module de Young* du matériau poinçonné : c'est donc un moyen pratique de mesure de ce module de Young. Cette méthode est utilisée encore aujourd'hui (Giroud, 1973), avec des perfectionnements, notamment pour la Mécanique des roches, prenant en compte l'épaisseur du poinçon,

les effets localement plastiques etc. (voir Henry et al., 2004).

Enfin la modélisation Boussinesq des milieux pulvérulents a acquis depuis les dernières années une assez grande popularité, due à ce que l'on est de plus en plus à même d'aborder les problèmes des milieux granulaires. Comme l'hypothèse de Boussinesq en turbulence, elle peut être considérée comme une première approximation de solutions que l'on cherche à améliorer. Mais dans ce domaine, la recherche fondamentale est beaucoup plus balbutiante, et l'avantage du modèle de Boussinesq est de donner des solutions qualitativement réalistes. Ce modèle est utilisé en génie civil, au minimum pour initialiser des solutions que l'on recherche ensuite par itération.

Nous avons le bonheur de posséder aujourd'hui une remarquable « *Histoire de la Mécanique* » publiée au milieu du XX^e siècle sous la signature de René Dugas (1950). Si nous y cherchons comment celui-ci imagine alors l'avenir de la Mécanique et quelles sont les directions dans lesquelles se développe cette science, nous observons que c'est vers la *Mécanique relativiste* (développée alors par Einstein) et la *Mécanique ondulatoire et quantique* (développée par Louis de Broglie) que se tourne Dugas ⁽⁴³⁾. Cinquante ans plus tard, nous disposons d'un peu plus de recul pour voir ce que représenta, pour la Mécanique, la totalité du XX^e siècle. Qu'y voyons-nous ? outre ces côtés fondamentaux, qui concrétisent l'un des trois « pieds » de la Mécanique que j'évoquais dans l'introduction (ici : la Physique mathématique), bien d'autres volets se sont ouverts, que l'on ne soupçonnait pas encore à mi-chemin de ce XX^e siècle. Citons, parmi d'autres : la *rhéologie*, l'*aviation*, l'*instabilité hydrodynamique et la turbulence*. La *rhéologie* (encore de la *Physique*), grâce à la découverte de la thermodynamique des processus irréversibles, permit l'exploration systématique de matériaux nouveaux ou complexes : née des travaux (1916) d'Eugène Bingham (1878-1945), elle se poursuit sur un plan plus fondamental avec Lars Onsager (1903-1976) puis Ilya Prigogine (1917-2003). L'*aviation*, archétype des *Sciences de l'Ingénieur*, se développa entre 1906 et 1950 ⁽⁴⁴⁾ sous l'impulsion de savants comme Prandtl et son école de Göttingen : Richard Blasius (1883-1970), Albert Betz (1885-1968), Jakob Ackeret (1898-1981), Adolf Busemann (1901-1986) ... Enfin de l'*instabilité hydrodynamique*, à mi-chemin entre la Physique et les Sciences de l'Ingénieur, on peut dire que, reliant la modélisation déterministe des équations de Navier-Stokes à la modélisation stochastique de la turbulence, elle a pu arriver au degré de développement que nous lui voyons aujourd'hui parce que son point de départ avait été la modélisation de Boussinesq. L'une de ses applications les plus spectaculaires fut peut-être, en Astrophysique, la compréhension de la vie et de la mort des étoiles par Subramanyan Chandrasekhar (1910-1998, prix Nobel de physique 1983 pour la découverte de la *masse de Chandrasekhar*) : Boussinesq prenant place à mi-distance entre Poisson et Chandrasekhar, voilà, en définitive, qui n'est pas si mal !

On peut avoir une idée de l'actualité des travaux de Boussinesq si l'on se réfère à la recherche poursuivie au *Laboratoire de Mécanique de Lille* (UMR 8107 du CNRS), version moderne de la structure à laquelle aurait pu appartenir Boussinesq si de telles institutions avaient existé de son temps. Sans que ces recherches soient directement liées à ses travaux, on peut dire

⁽⁴³⁾ Il est curieux que Dugas, polytechnicien et Ingénieur des chemins de fer, ne considère que ces aspects de l'avenir de la Mécanique, alors que tout le long de l'*Histoire de la Mécanique* il évoque avec beaucoup de finesse de nombreuses conquêtes réalisées par cette discipline dans le domaine des Sciences de l'Ingénieur.

⁽⁴⁴⁾ Convenons que ce développement a reçu pour cela une aide dont il se serait bien passé : deux guerres mondiales...

que l'on y retrouve nombre de ses thématiques : l'Approximation, la turbulence, les écoulements lents autour d'obstacles, les milieux granulaires, la Mécanique des sols. Des collègues s'intéressent aussi à la modélisation des coques. Ainsi Boussinesq est en quelque sorte un fédérateur de ce Laboratoire. Comme cela se produit assez souvent, c'est cent ans après ses travaux que ce savant se découvre d'actualité.

Bibliographie

(i) Œuvres citées de Joseph Boussinesq

Une bibliographie très complète des (très nombreuses) œuvres de Boussinesq peut être trouvée dans J.C. Poggendorff (1959). N'ont été référencées ici que celles que j'ai citées dans le corps du texte.

- [1] "Etudes sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes". Thèse de doctorat ès Sciences mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1867, 61 pages.
- [2] "Théorie nouvelle des ondes lumineuses". *J. Math. Pures Appl.*, série II, **13**, 1868, 313-339.
- [3] "Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides". *J. Math. Pures Appl.*, série II, **13**, 1868, 377-423.
- [4] "Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire". *C.R. Ac. Sci. Paris*, **72**, 1871, 755-759 ; **73**, 256-260 ; **73**, 1210-1212.
- [5] "Premier mémoire : des tiges ; deuxième mémoire : des plaques planes". *J. Math. Pures Appl.*, série II, **16**, 1871, 125-240 et 241-274.
- [6] "Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal". *J. Math. Pures Appl.*, série II, **17**, 1872, 55-108.
- [7] "Théorie des ondes liquides périodiques". *Mémoires présentés Ac. Sci. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **20**, 1872.
- [8] "Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui des massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion". *Mémoires prés. Ac. Roy. Sc. de Belgique. Série 2 : Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers*, **40**, 1876 F. Hoyez, Bruxelles (180 pages). Réédité en 1885.
- [9] "Essai sur la théorie des eaux courantes". *Mémoires présentés Ac. Sci. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **23**, 1877 (660 pages) ; **24**, 1877 (60 pages).
- [10] "Compléments à une étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes » et à un mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides ». *J. Math. Pures Appl.*, série III, **4**, 1878, 335-376.
- [11] "Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale". Gauthier-Villars, Paris, 1878.
- [12] "Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres". *J. Math. Pures Appl.*, série III, **5**, 1879, 163-194 et 329-344.
- [13] "Etude sur divers points de la philosophie des sciences, avec une addition concernant l'origine des notions géométriques". Gauthier-Villars, Paris, 1879.
- [14] "Notice sur les travaux scientifiques de Mr. Boussinesq et suppléments à cette notice". Danel, Lille, 1880. Réédité et actualisé en 1883 et 1885.
- [15] "Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini au repos au mouvement varié d'une sphère solide". *C.R.Ac.Sci. Paris*, **100**, 1885, 935-937.
- [16] "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques". Gauthier-Villars, Paris, 1885 (722 pages).

- [17] "*Cours d'analyse infinitésimale en vue de ses applications mécaniques et physiques*" (2 vol.), Gauthier-Villars, Paris, 1887 et 1890.
- [18] "*Leçons synthétiques de Mécanique générale servant d'introduction au cours de Mécanique physique*". Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- [19] "Sur la théorie de l'écoulement des liquides par les orifices en mince paroi, circulaires ou rectangulaires allongés ; calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels de l'orifice". *J. Phys. Théor. Appl.*, série 3, **1**, 1892, 265-285.
- [20] "*Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*". Gauthier-Villars et fils, Paris, 1897, 1re partie, 64 pages ; 2ème partie (*étude des régimes graduellement variés*) (76 pages).
- [21] "*Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière, Tome I : Problèmes généraux*". Gauthier-Villars, Paris, 1901 (360 pages).
- [22] "*Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière*". Gauthier-Villars, Paris, 1903 (657 pages).
- [23] "Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible se composant de filets à vitesses inégales et contenu dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **22**, 1905, 349-368.
- [24] "Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale". *Mémoires prés. Ac. Roy. Sc. de Belgique. Série 2 : Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers*, **50**, 1908. F. Hoyez, Bruxelles (134 pages).
- [25] "Sur une importante signification de la théorie des ondes que produisent, à la surface d'un liquide, l'émersion d'un solide ou l'impulsion d'un coup de vent". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **27**, 1910, 9-42.
- [26] "Sur les vibrations longitudinales que produit, dans une barre élastique, la variation de ses températures". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **28**, 1911, 377-388.
- [27] "Sur l'existence d'une viscosité superficielle dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu". *Ann. Chimie et Physique*, **29**, 1913, 349-362.
- [28] "Contribution à la théorie de l'action capillaire, avec extension des forces de viscosité aux couches superficielles des liquides et application notamment au lent mouvement vertical, devenu uniforme, d'une goutte fluide sphérique, dans un autre fluide indéfini et d'un poids spécifique différent". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **31**, 1914, 15-85.
- [29] "Calcul de vitesses bien continues de régime uniforme par des polynômes, dans des tubes cylindriques de formes diverses avec application à une évaluation approximative du coefficient de débit dans la filtration de l'eau à travers des sables à grains plus ou moins fins". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **32**, 1915, 1-148.
- [30] "Supplément à un mémoire des *Annales* sur les principes de la mécanique etc., inséré en novembre 1910 et déjà complété par un autre mémoire en décembre 1912. Réflexions sur la longue durée de la dynamique rudimentaire d'Aristote, et sur son rôle capital jusqu'au jour où fut créée l'analyse infinitésimale". *Ann. Sc. E.N.S.*, sér. 3, **32**, 1915, 161-175.
- [31] "Poussée des terres : recherche des lois générales de l'état ébouleux produit dans un massif de sable par des déformations planes parallèles à un plan vertical". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **34**, 1917, 1-79.
- [32] "Compléments à un récent mémoire des *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* sur la poussée des terres et l'état ébouleux, avec quelques idées générales sur la mécanique des semi-fluides et application de ces idées aux corps plastiques". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **35**, 1918, 1-128.
- [33] "Aplatissement suivant l'axe polaire, par la tension superficielle d'une goutte liquide de révolution et sans pesanteur, possédant une vitesse angulaire donnée de rotation autour de cet axe". *Ann. Sc. E.N.S.*, Sér. 3, **38**, 1921, 1-12.

(ii) Documents biographiques et Histoire des Sciences

Anderson J.D., 1997. "*A history of Aerodynamics*". Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Berger H., Ballot C.B., 1970. "Boussinesq, Joseph Valentin", in *Dictionary of scientific biography*, Charles Scribner's sons, New York.

Dugas R., 1950. "*Histoire de la Mécanique*". Editions du Griffon, Neuchâtel, Suisse. Rééd. J. Gabay, Paris, 1996.

Hager W.H., Ræmy F., 1997. "*Joseph Boussinesq (1842-1929) : un hydraulicien mathématicien*". Notice

internet : //ottawa.ambafrance.org/hyperlab/PEOPLE/bouss.html

- Lapparent, A. de** —, 1897. "Notice sur G. Lamé" in *Livre du centenaire de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars, t. 1, p. 120 et suiv.
- Parreau M.**, 2004. "*Joseph-Valentin Boussinesq (1842-1929)*". Notice disponible sur le site internet www.univ-lille1.fr/asa/boussinesq.doc/
- Picard E.**, 1933. "La vie et l'œuvre de Joseph Boussinesq", in *Académie des Sciences, Discours et notices*. Gauthier-Villars, Paris.
- Poggendorff J.C.**, 1959. "*Biographisch-literarisches Handwörterbuch des exakten Wissenschaften*". Bände II, IV, V, VI. Akademie Verlag, Berlin.
- Rivé P.**, 1987 (coordinateur). "*La Sorbonne et sa reconstruction*". Ed. La Manufacture, Lyon.
- Timoshenko S.P.**, 1953. "*History of strength of materials*". McGraw-Hill, New York. Réédition Dover, 1983.
- Zeytounian R.K.**, 2003a. "Il y a cent ans ... et aujourd'hui, l'approximation de Boussinesq". *Matapli*, **71**, 71-84.
- Zeytounian R.K.**, 2003b. "Joseph Boussinesq and his Approximation : a contemporary view". *C.R.Ac.Sc. Mécanique*, **331**, 575-586.

(iii) Autour de Boussinesq et après Boussinesq

- Basset A.B.**, 1888. "On the motion of a sphere in a viscous liquid". *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A179**, 43-63.
- Bazin H.E.**, 1865. "Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts". *Mémoires prés. Ac.Sc. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **19**, 1-494.
- Bazin H.E.**, 1902. "Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux". *Mémoires présentés Ac.Sc. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **32** (6).
- Bénard H.**, 1900. "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide". *Rev. gén. Sc. Pures et Appl.*, **11**, 1261-1271 et 1309-1328.
- Bingham E.C.**, 1916. "An investigation of the laws of plastic flows". *U.S. Bureau of Standards Bull.*, **13**, 309-353.
- Bois P.A.**, 1976. "Propagation linéaire et non linéaire d'ondes atmosphériques". *J. Méc.*, **15**, 781-811.
- Boulanger A.**, 1909. "*Hydraulique générale*". Tome 1 : "*Principes et problèmes fondamentaux*", 380 pages. Tome 2 : "*Problèmes à singularités et applications*", 280 pages. Octave Doin & fils, Paris.
- Chandrasekhar S.**, 1961. "*Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*". Clarendon, Oxford.
- Coimbra C.F.M., Rangel R.H.**, 1998. "General solution of the particle momentum equation in unsteady Stokes flow". *J. Fl. Mech.*, **370**, 53-72.
- Corrsin S., Lumley J.**, 1959. "On the equation of motion for a particle in turbulent flow". *Appl. Sc. Res.*, **A6**, 114-116.
- Dadi M., Stanislas M., Rodriguez O., Dymant A.**, 1991. "A study by holographic velocimetry of the behaviour of free small particles in a flow". *Experiments in Fluids*, **10**, 285-294.
- Darcy H.**, 1857. "Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux". *Mémoires présentés Ac.Sc. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **15**, 286 p. + atlas.
- Darcy H., Bazin H.E.**, 1865. "*Recherches hydrauliques entreprises par Mr. Darcy*". Imprimerie nationale, Paris, 684 p. + atlas.
- Faxen H.**, 1923. "Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres". *Arkiv Math. Astron. Fys.*, **17**, 27.1-28.
- Fefferman Ch. L.**, 2000. "*Existence and smoothness of the Navier-Stokes equations*". Millennium Problems, site internet www.claymath.org/prizeproblems/
- Flamant A.**, 1885. "Tables numériques pour le calcul de la poussée des terres". *Ann. Ponts et Chaussées*, **9**, 515-540.
- Flamant A.**, 1888. "Exposé sommaire de la théorie des ondes liquides périodiques". *Ann. Ponts et Chaussées*, **15**, 774-809.
- Germain P.**, 1988. "*Mécanique*", t. 1 et 2. Ellipses, Paris.
- Giroud J.P.**, 1973. "*Tables de calcul de fondations superficielles*". Dunod, Paris.
- Green G.**, 1828. "*Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*". Bromley House, Nottingham.

- Hagen G.L.H.**, 1839. "Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren". *Poggendorff's Annalen für Physik und Chemie*, **16**.
- Hele-Shaw H.S.**, 1898. "The flow of water". *Nature*, **58**, n° 1489, 33-36.
- Helmholtz H.**, 1847. "Ueber die Erhaltung der Kraft : eine physikalische Abhandlung". G. Reimer, Berlin, 72 p.
- Henry J.P., Wang W., Dourfaye A., Sibai M.**, 2004. "Détermination des propriétés élastiques et de rupture de roches par l'essai de micropénétration". Actes du Coll. Int. GEO-Beyrouth 2004, I. Shahrouf *et al.* eds, ISBN 9953-0-0252-5.
- Hugoniot P.H.**, 1887. "Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits". *J. Ecole Polytechnique*, **57**, 1887, 1-97, et **58**, 1889, 1-125.
- Kolmogorov A.**, 1941. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number". *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30**, 301-305.
- Korteweg J.D., De Vries G.**, 1895. "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves". *Phil. Mag.*, **39**, 422-443.
- Lamé G.**, 1852. "Théorie mathématique de l'élasticité". Mallet-Bachelier, Paris.
- Lamé G.**, 1861. "Leçons sur la théorie analytique de la chaleur". Mallet-Bachelier, Paris, 414 p.
- Lesieur M.**, 2000 (coordinateur). "Turbulence et déterminisme". P.U.G., Grenoble, 207 p.
- Mach E., Mach L.**, 1889. "Ballistisch photographische Versuche". *Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften*, **98**.
- Miles J.W.**, 1980. "Solitary waves". *Ann. Rev. Fl. Mech.*, **12**, 11-43.
- Navier C.L.M.H.**, 1822. "Sur les lois du mouvement des fluides". *Mémoires prés. Ac.Sc. Paris*, **6**, 389-440.
- Oberbeck A.**, 1879. "Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen Infolge von Temperaturdifferenzen". *Annalen für Physik und Chemie, neue Folge*, **7**, 271-292.
- Oseen C.W.**, 1910. "Ueber die Stokesche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik". *Ark. Mech. Astronom. Fys.*, **6**, n° 29. Réédité in "Hydromechanik", **82**, 1927, 21-29.
- Poiseuille J.L.M.**, 1846. "Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres". *Mémoires présentés Ac.Sc. Paris. Série 2 : Mémoires des Savants étrangers*, **9**, 433-543.
- Poisson S.D.**, 1835 "Théorie mathématique de la chaleur". Bachelier, Paris.
- Prandtl L.**, 1904. "Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung". *Verhandlungen drittes Internationaler Mathematiker-Kongress, Heidelberg*, 484-491.
- Proudman I., Pearson J.R.A.**, 1957. "Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder". *J. Fl. Mech.*, **2**, 237-262.
- Rankine W.M.**, 1856. "On the stability of a loose Earth". *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A**.
- Rayleigh, W. Strutt, Lord** —, 1876. "On waves". *Phil. Mag.*, **1**, Series 5, 257-279.
- Rayleigh, W. Strutt, Lord** —, 1916. "On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". *Phil. Mag.*, **32**, Series 6, 529-546.
- Reynolds O.**, 1883. "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels". *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A174**, 51-105.
- Reynolds O.**, 1894. "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion". *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A186**, 123-164.
- Saint-Venant, A.J.C. Barré de** —, 1843. "Note à joindre à un mémoire sur la dynamique des fluides". *C.R.Ac.Sc.*, **17**, 1240. Cette Note est développée dans "Mécanique appliquée de Navier annotée par Saint-Venant", 1858.
- Saint-Venant, A.J.C. Barré de** —, 1871. "Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit". *C.R.Ac.Sc.*, **73**, 237-240.
- Schwartz L.**, 1948. "Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques".
- Stokes G.G.**, 1845. "On the theory of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids". *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8**, 287.
- Stokes G.G.**, 1851. "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums", part II. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**, 8-106.
- Timoshenko S., Goodier J.N.**, 1970. "Theory of elasticity". Mc Graw Hill, New York.
- Whitham G.B.**, 1974. "Linear and nonlinear waves". J. Wiley and sons, New York.
- Zeytounian R.K.**, 1974. "A rigorous derivation of the equations of compressible viscous fluid motion with gravity at low Mach number". *Arch. Mech. Stos.*, **26**, 499-509.

